ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΠΑΤΡΑΣ

Εργαστήριο Λήψης Αποφάσεων & Επιχειρησιακού Προγραμματισμού

Καθηγητής Ι. Μητρόπουλος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΤΩΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

Κεφάλαιο 8

Συνεχείς Κατανομές Πιθανοτήτων

- *Επιμέλεια παρουσιάσεων: Δρ. Αλέκα Καλαπόδη*

Συναρτήσεις Κατανομής Πιθανοτήτων …

Αντίθετα με τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 7, μια ***συνεχής τυχαία μεταβλητή*** είναι μια μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει **μη αριθμήσιμο** πλήθος τιμών.

➔ Δεν μπορούμε να γράψουμε όλες τις δυνατές τιμές διότι υπάρχουν άπειρες το πλήθος.

➔ Επειδή υπάρχει άπειρο πλήθος τιμών, η πιθανότητα κάθε μεμονωμένης τιμής είναι πρακτικά 0.

Οι Σημειακές Πιθανότητες είναι Μηδέν

➔Επειδή υπάρχει άπειρο πλήθος τιμών, η πιθανότητα κάθε μεμονωμένης τιμής είναι πρακτικά 0.

Άρα, μπορούμε μόνο να ορίσουμε την πιθανότητα ενός ***διαστήματος τιμών***.

Π.χ. έχοντας μια **διακριτή** τυχαία μεταβλητή, όπως στη ρίψη ενός ζαριού, έχει νόημα να μιλάμε για την P(X=5).

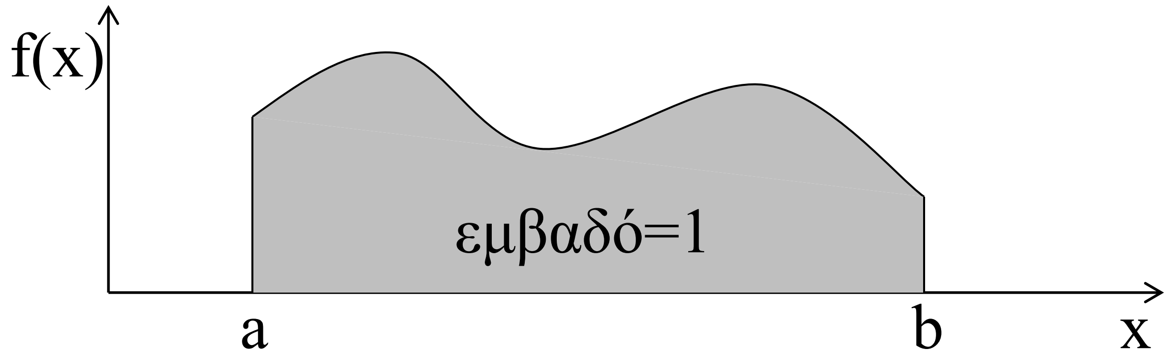
Σε μια **συνεχή** περίπτωση (π.χ. με το χρόνο ως τυχαία μεταβλητή), η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή που μας ενδιαφέρει να είναι **ακριβώς** 5 λεπτά είναι απείρως μικρή, επομένως P(X=5) = 0.

Έχει νόημα να μιλήσουμε για την P(X ≤ 5).

Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανοτήτων …

Μια συνάρτηση f(x) καλείται ***συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων*** (στο διάστημα $\mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}$) εάν πληροί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

1) $f(x) \ge 0$ για κάθε **x** μεταξύ **a** και **b**, και

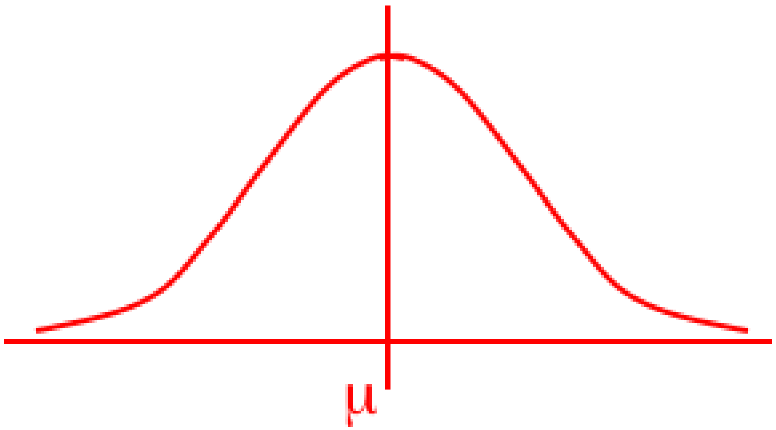


2) Το συνολικό εμβαδό κάτω από την καμπύλη μεταξύ **a** και **b** είναι 1.0

Η Κανονική Κατανομή …

Η ***κανονική κατανομή*** είναι η πιο σημαντική από όλες τις κατανομές πιθανοτήτων. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων μιας ***κανονικής τυχαίας μεταβλητής*** δίνεται από την:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$



Η γραφική παράσταση :

σχήμα καμπάνας,

συμμετρική ως προς τον μέσο μ …

Η Κανονική Κατανομή …

Σημαντικά στοιχεία:

Η κανονική κατανομή καθορίζεται πλήρως από δύο παραμέτρους: την τυπική απόκλιση και τον μέσο

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

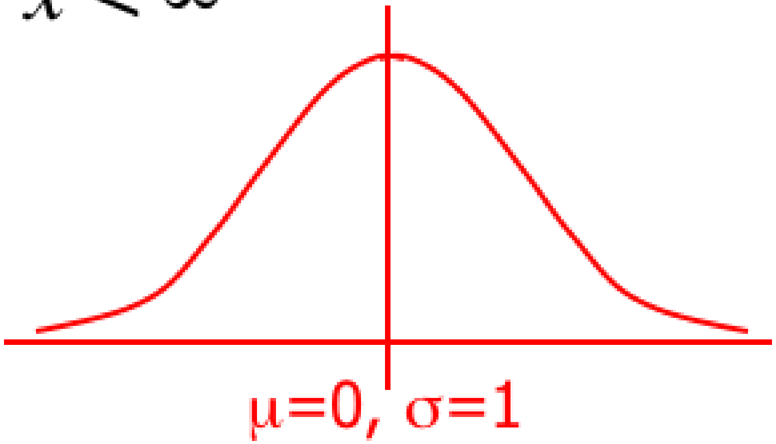
Η κανονική κατανομή έχει σχήμα καμπάνας και είναι συμμετρική ως προς τον μέσο

Η κανονική κατανομή ***παίρνει τιμές από -∞ έως + ∞***

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή …

Μια κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και τυπική απόκλιση ένα καλείται ***τυποποιημένη κανονική κατανομή***.

$$f(x) = \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0}{1}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

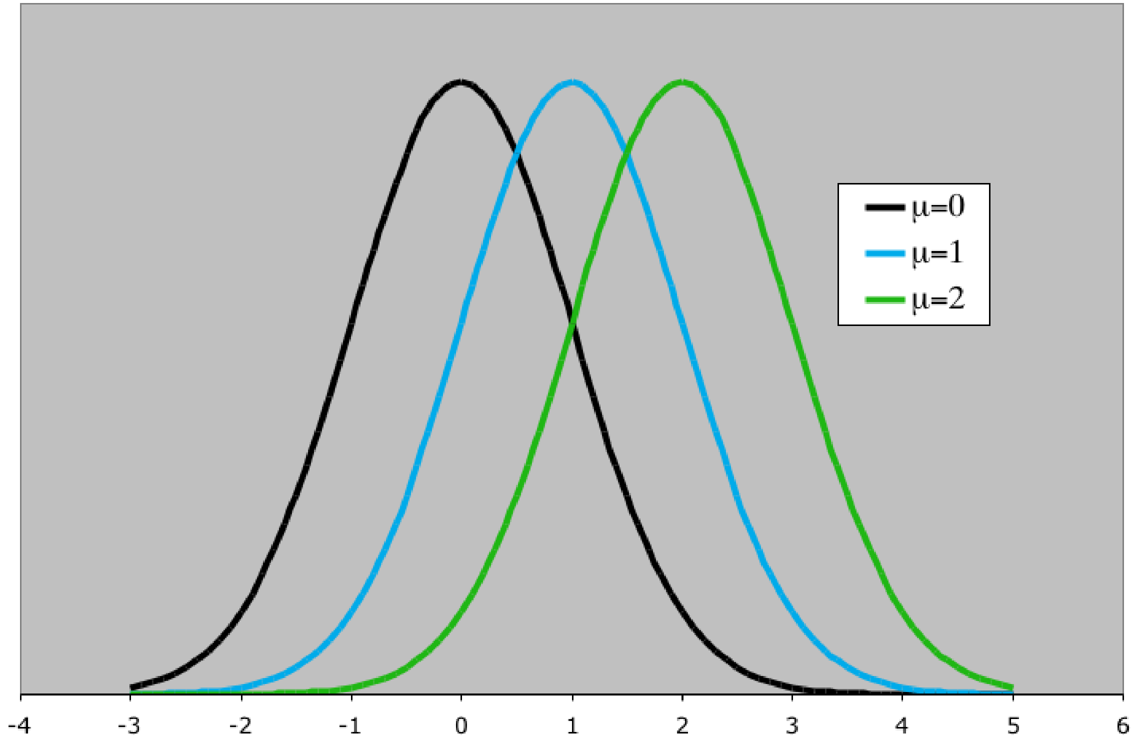


Όπως θα δούμε, κάθε κανονική κατανομή μπορεί να ***μετατραπεί*** σε τυποποιημένη κανονική κατανομή με απλές πράξεις. Αυτό κάνει τους υπολογισμούς ευκολότερους.

Κανονική Κατανομή …

Η κανονική κατανομή καθορίζεται από δύο παραμέτρους: τον μέσο μ και την τυπική απόκλιση σ. Αυξάνοντας τον μέσο *μετατοπίζεται* η καμπύλη προς τα δεξιά …

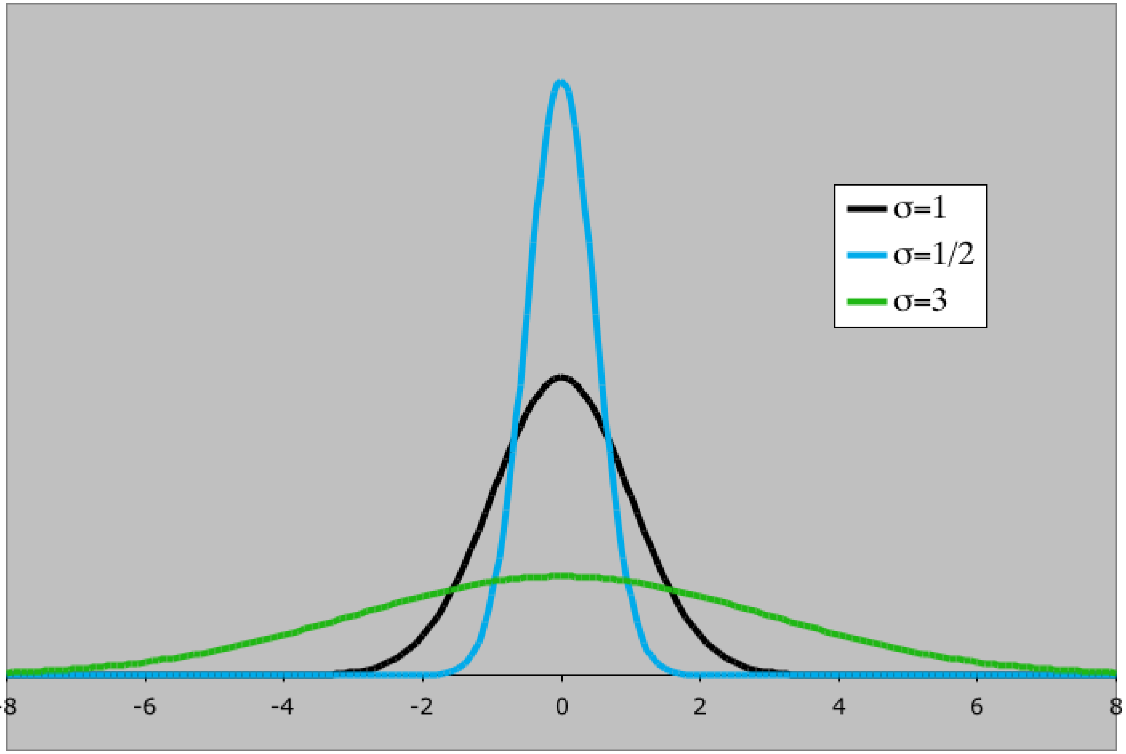
Ίδια διακύμανση, διαφορετικός μέσος



Κανονική Κατανομή …

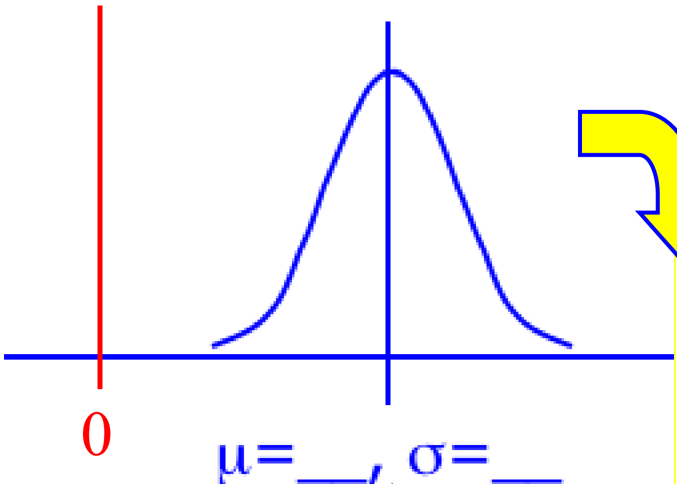
Η κανονική κατανομή καθορίζεται από δύο παραμέτρους: τον μέσο μ και την τυπική απόκλιση σ. Αυξάνοντας την τυπική απόκλιση “*πλαταίνει*” η καμπύλη …

Ίδιος μέσος, διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις

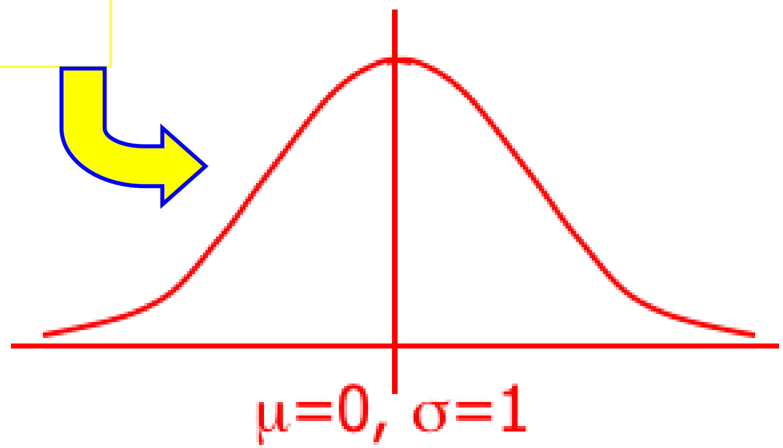


Υπολογισμός πιθανοτήτων …

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση για να μετατρέψουμε οποιαδήποτε κανονική τυχαία μεταβλητή σε **τυποποιημένη** κανονική τυχαία μεταβλητή …



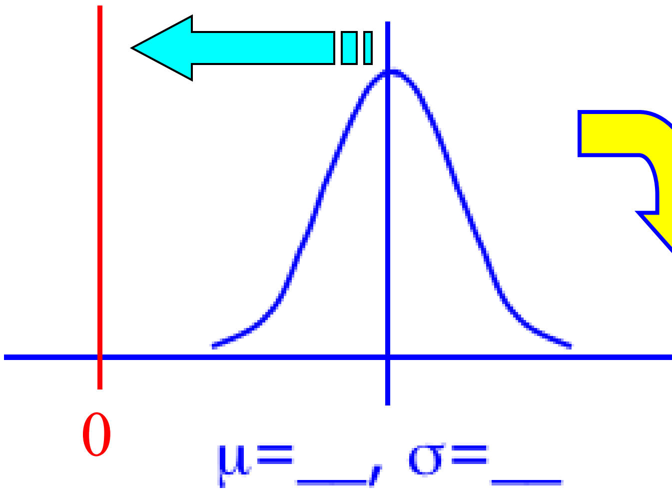
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Συμβουλή: πάντοτε να κάνετε σχήμα!

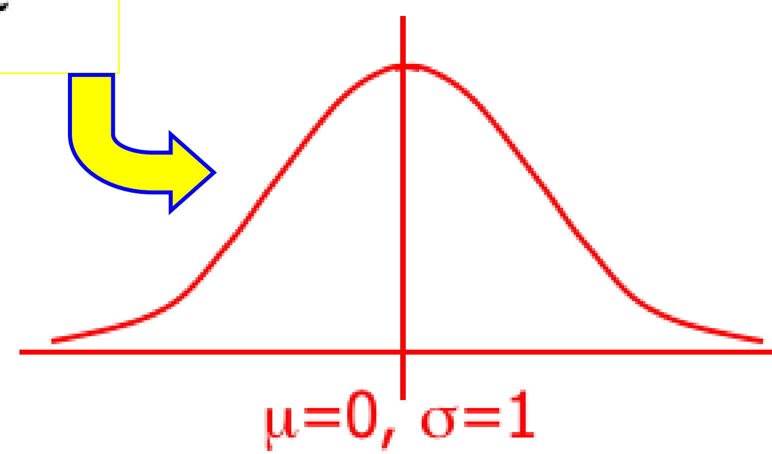
Υπολογισμός πιθανοτήτων …

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση για να μετατρέψουμε οποιαδήποτε κανονική τυχαία μεταβλητή σε **τυποποιημένη** κανονική τυχαία μεταβλητή …



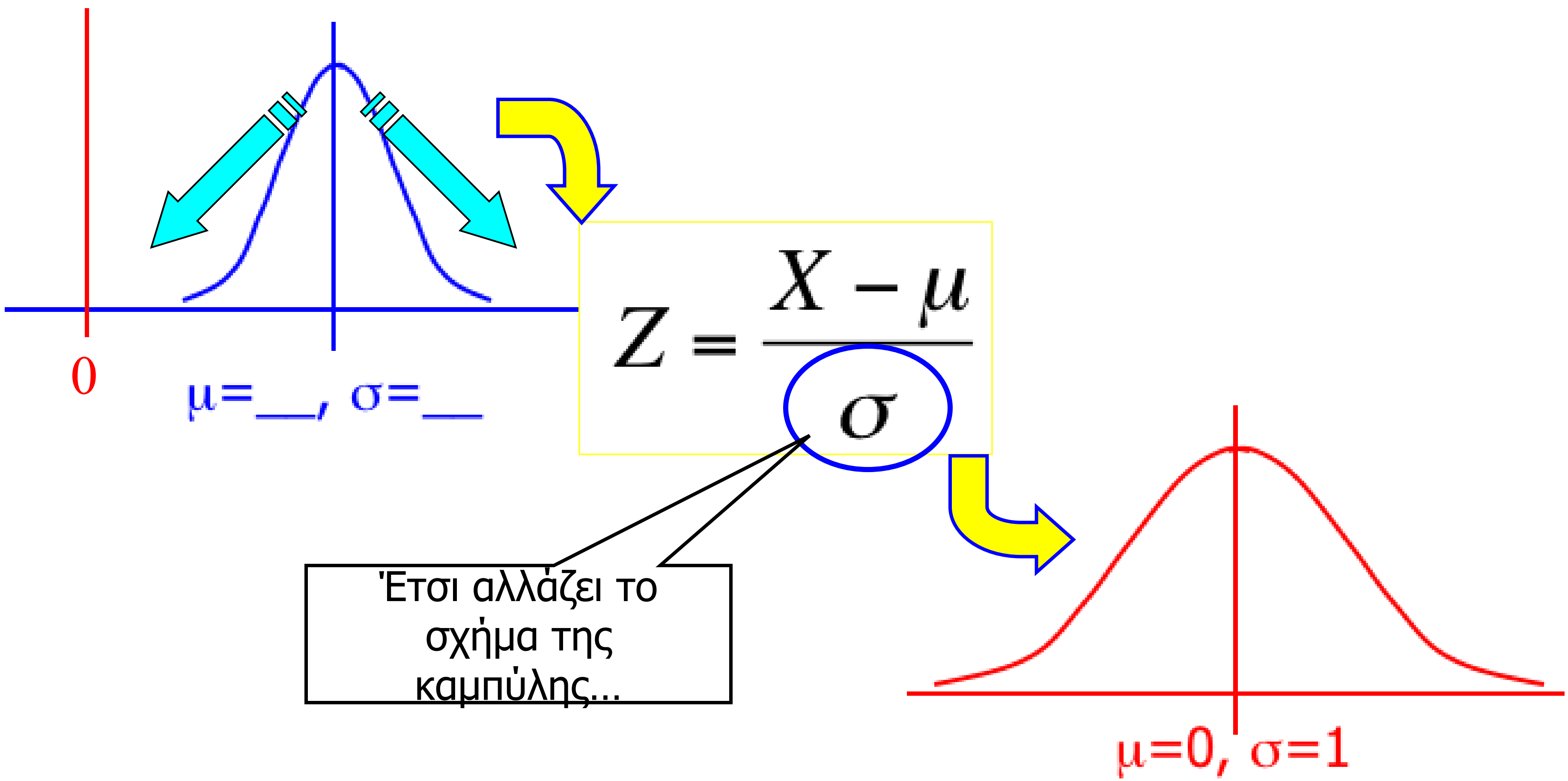
Έτσι μετατοπίζεται ο μέσος της X στο μηδέν...

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Υπολογισμός πιθανοτήτων …

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση για να μετατρέψουμε οποιαδήποτε κανονική τυχαία μεταβλητή σε **τυποποιημένη** κανονική τυχαία μεταβλητή …



Παράδειγμα 8.2…

Υποθέτουμε ότι σε ένα πρατήριο βενζίνης η ημερήσια ζήτηση απλής βενζίνης έχει κανονική κατανομή με μέσο 1.000 γαλόνια και τυπική απόκλιση 100 γαλόνια.

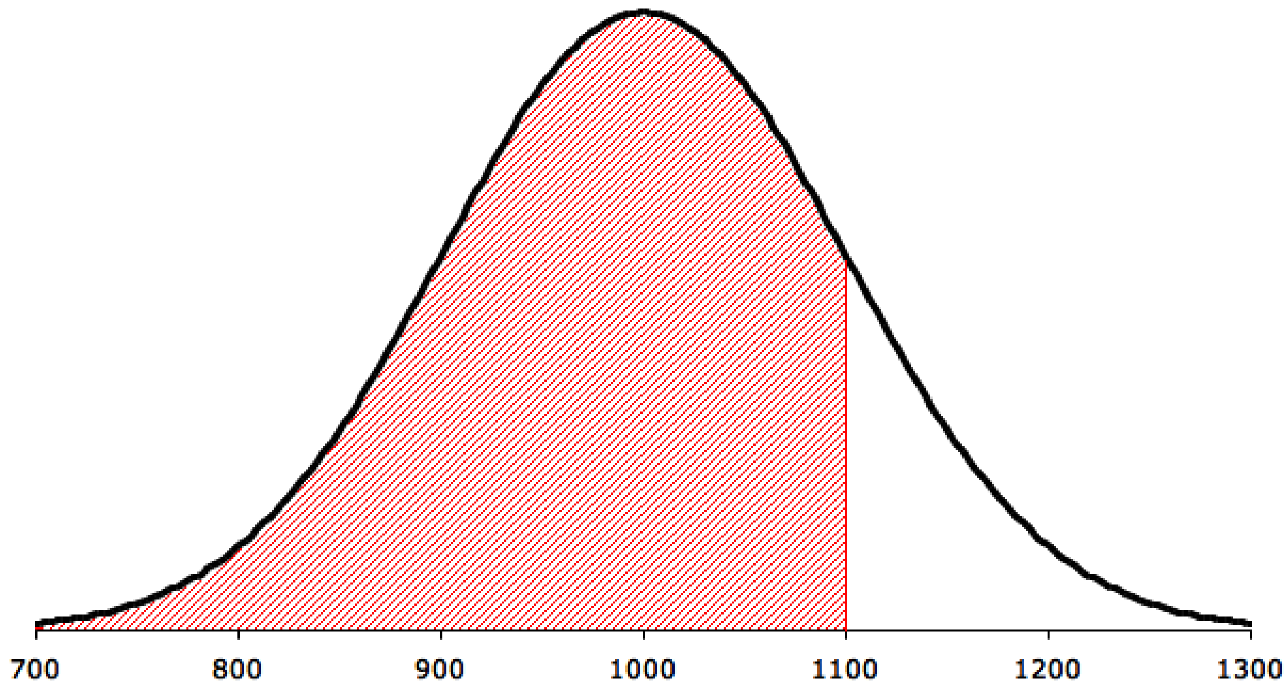
Ένα πρωί ο διευθυντής παρατηρεί ότι στις δεξαμενές υπάρχουν ακριβώς 1.100 γαλόνια απλής βενζίνης.

Η επόμενη παράδοση είναι προγραμματισμένη προς το τέλος της ημέρας. Ο διευθυντής θα ήθελε να ξέρει την πιθανότητα να έχει αρκετή απλή βενζίνη για να ικανοποιήσει τη ζήτηση της ημέρας.

Παράδειγμα 8.2…

Η ζήτηση έχει κανονική κατανομή με μέσο μ = 1.000 και τυπική απόκλιση σ = 100. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X < 1.100)$

Γραφικά, θέλουμε να υπολογίσουμε :



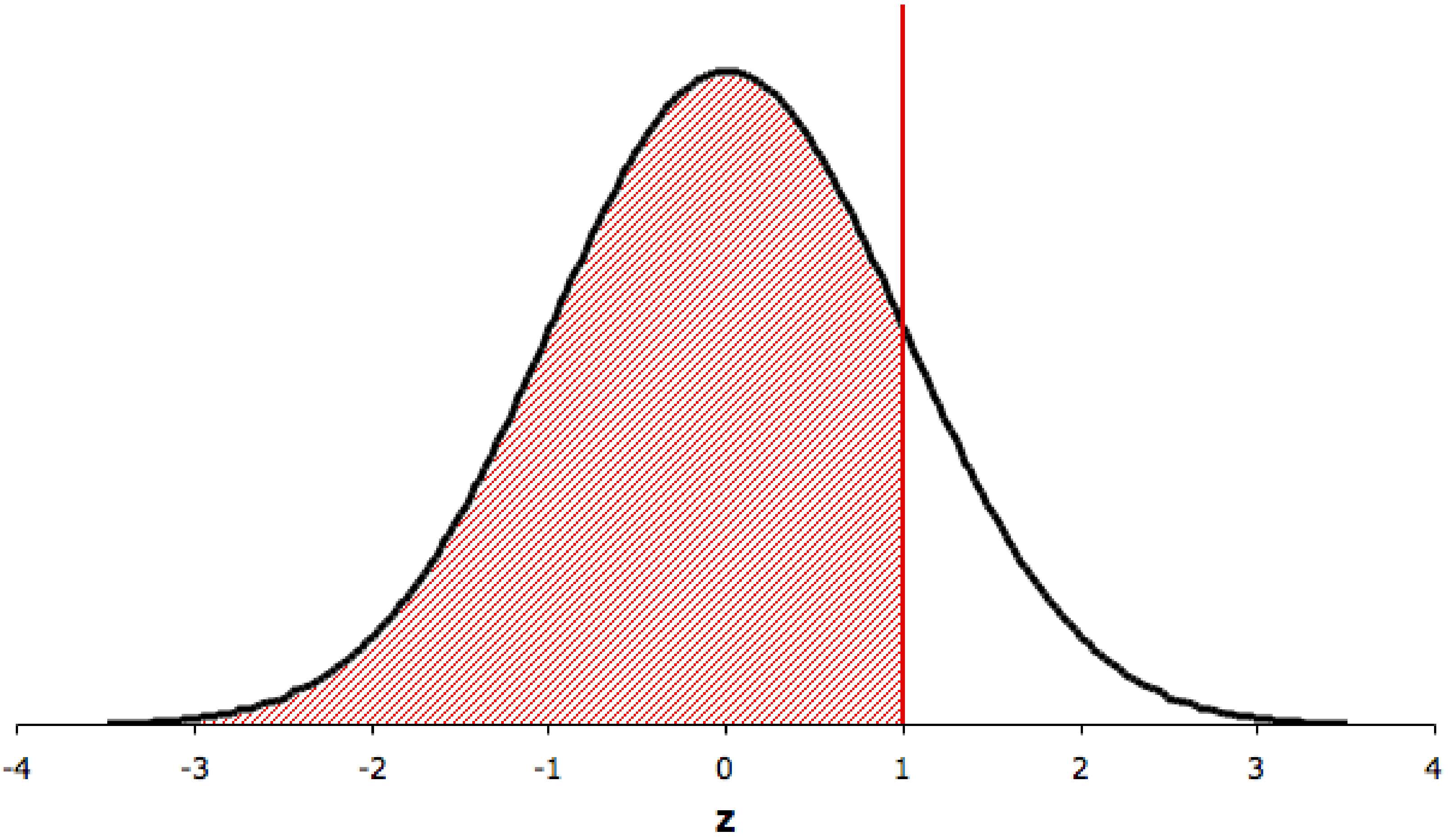
Παράδειγμα 8.2…

Το πρώτο βήμα να τυποποιήσουμε τη X. Ωστόσο, εάν κάνουμε οποιαδήποτε πράξη στη X πρέπει να κάνουμε την ίδια πράξη στο1.100. Επομένως,

$$P(X < 1{,}100) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1{,}100-1{,}000}{100}\right) = P(Z < 1.00)$$

Παράδειγμα 8.2…

Το παρακάτω σχήμα δείχνει γραφικά τη ζητούμενη πιθανότητα.



Παράδειγμα 8.2…

Οι τιμές της Z προσδιορίζουν τη θέση της αντίστοιχης τιμής της X.

Η τιμή $Z = 1$ αντιστοιχεί στην τιμή της X που είναι 1 τυπική απόκλιση πάνω από τον μέσο.

Σημειώστε ότι ο μέσος της Z, ο οποίος είναι 0, αντιστοιχεί στον μέσο της X.

Παράδειγμα 8.2…

Εάν γνωρίζουμε τον μέσο και την τυπική απόκλιση μιας κανονικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής, μπορούμε πάντοτε να μετασχηματίζουμε τον υπολογισμό πιθανοτήτων για την X σε υπολογισμό πιθανοτήτων για την Z.

Συνεπώς, χρειαζόμαστε μόνο έναν πίνακα, τον Πίνακα 3 στο Παράρτημα B, τον πίνακα πιθανοτήτων της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

Πίνακας 3…

Ο πίνακας αυτός είναι παρόμοιος με αυτούς που χρησιμοποιήσαμε για τη διωνυμική κατανομή και την κατανομή Poisson.

Δηλαδή, στον πίνακα καταγράφονται αθροιστικές πιθανότητες $P(Z < z)$ για τιμές της z μεταξύ του −3.09 και του +3.09

Πίνακας 3…

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα

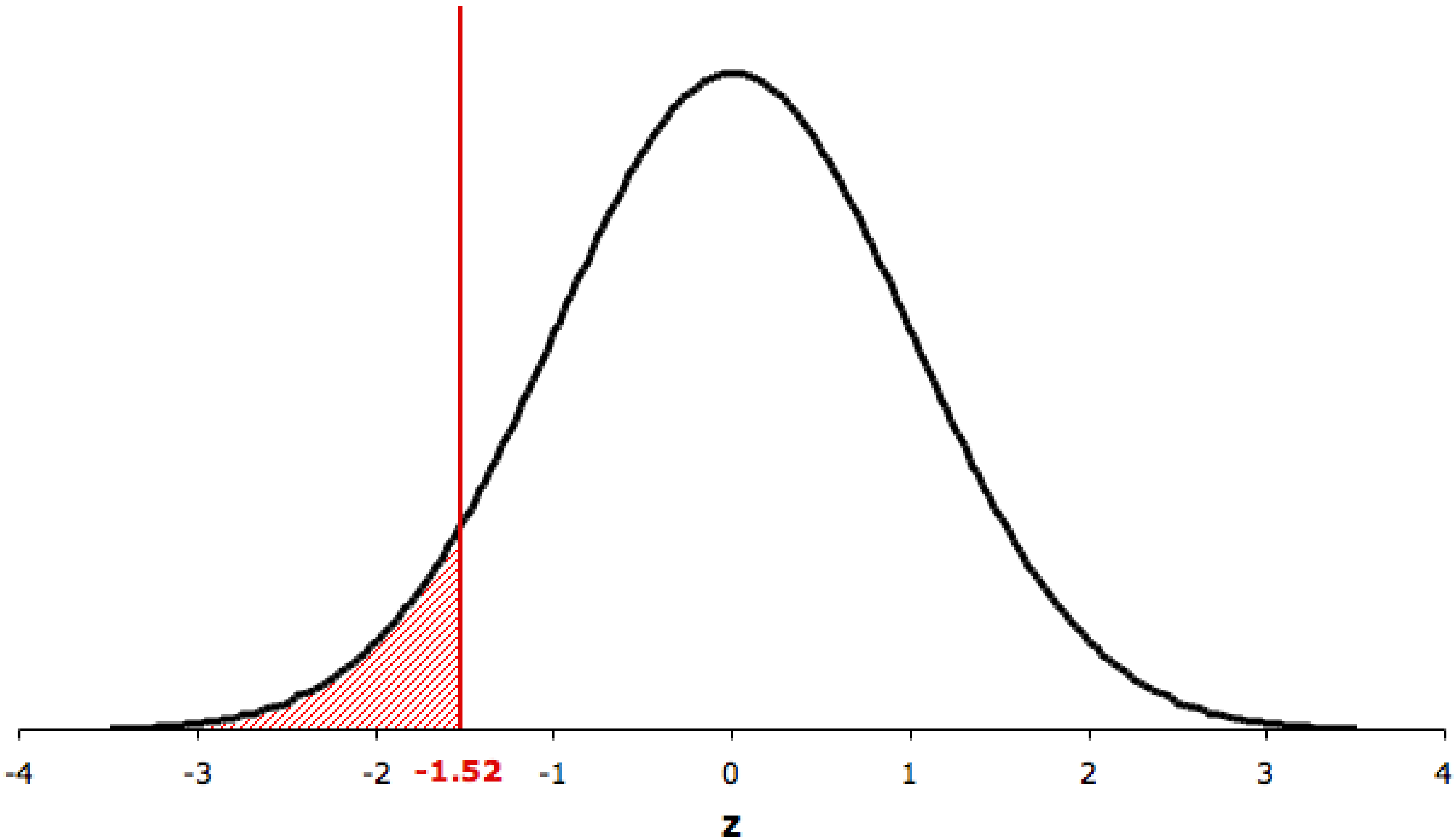
$$P(Z < -1.52)$$

Βρίσκουμε πρώτα το -1.5 στο αριστερό περιθώριο. Στη συνέχεια κινούμαστε κατά μήκος της γραμμής μέχρι να βρούμε την πιθανότητα κάτω από την επικεφαλίδα .02 Επομένως,

$$P(Z < -1.52) = .0643$$

Πίνακας 3…

$P(Z < -1.52) = .0643$



Πίνακας 3…

Όπως στην περίπτωση με τους Πίνακες 1 και 2, μπορούμε τώρα να καθορίσουμε την πιθανότητα η τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή να είναι μεγαλύτερη από κάποια τιμή της z.

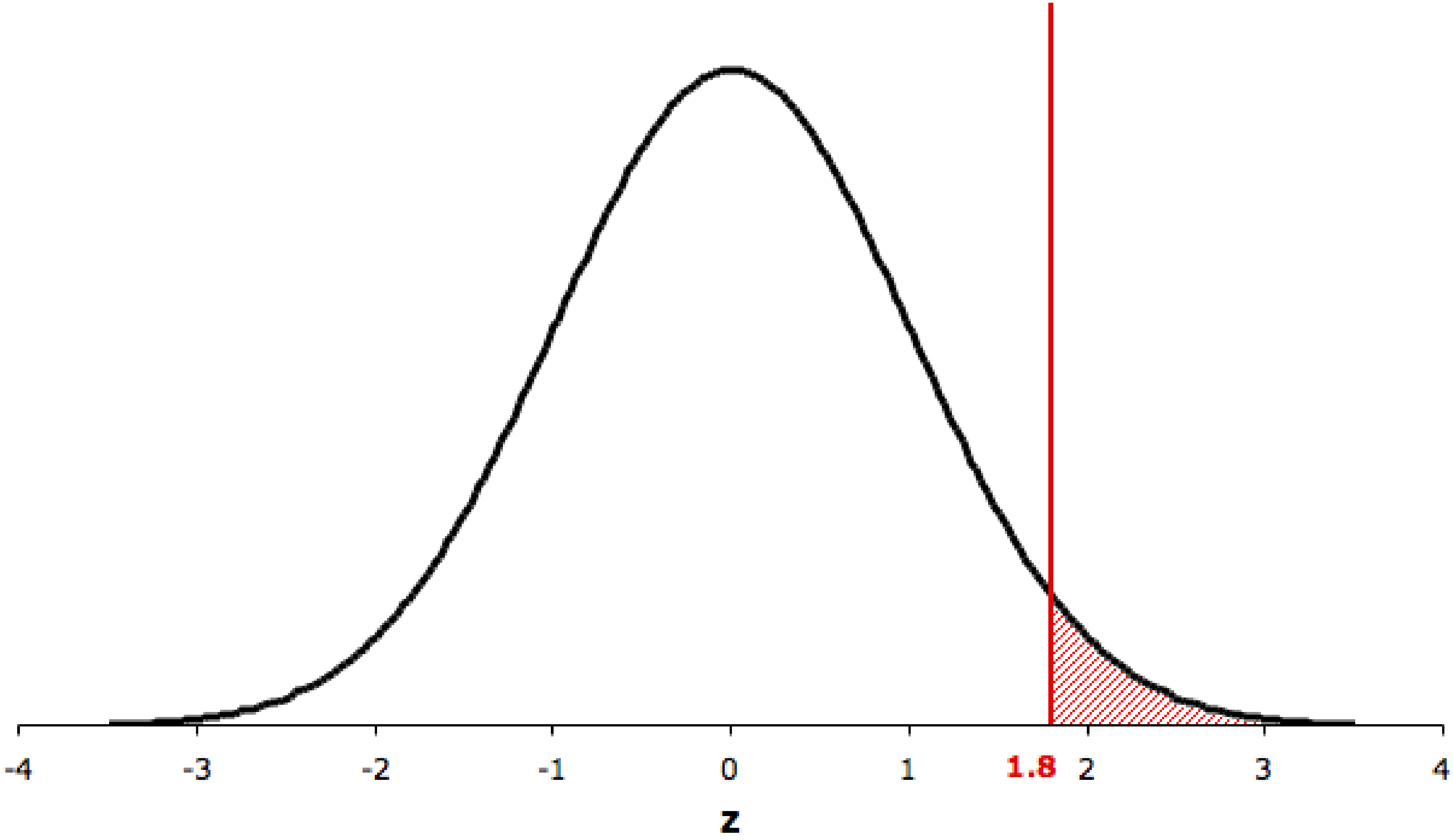
Για παράδειγμα, βρίσκουμε την πιθανότητα η Z να είναι μεγαλύτερη από 1.80 καθορίζοντας την πιθανότητα η Z να είναι μικρότερη από 1.80 και αφαιρώντας την τιμή αυτή από το 1.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα συμπληρώματος έχουμε

$$P(Z > 1.80) = 1 - P(Z < 1.80) = 1 - .9641 = .0359$$

Πίνακας 3…

$$P(Z > 1.80) = 1 - P(Z < 1.80) = 1 - .9641 = .0359$$



Πίνακας 3…

Μπορούμε επίσης εύκολα να καθορίσουμε την πιθανότητα μια τυποποιημένη κανονική τυχαία μεταβλητή να βρίσκεται μεταξύ 2 τιμών της z. Για παράδειγμα, υπολογίζουμε την πιθανότητα

$$P(-1.30 < Z < 2.10)$$

Βρίσκουμε τις 2 αθροιστικές πιθανότητες και υπολογίζουμε τη διαφορά τους. Έχουμε

$$P(Z < -1.30) = .0968$$

και

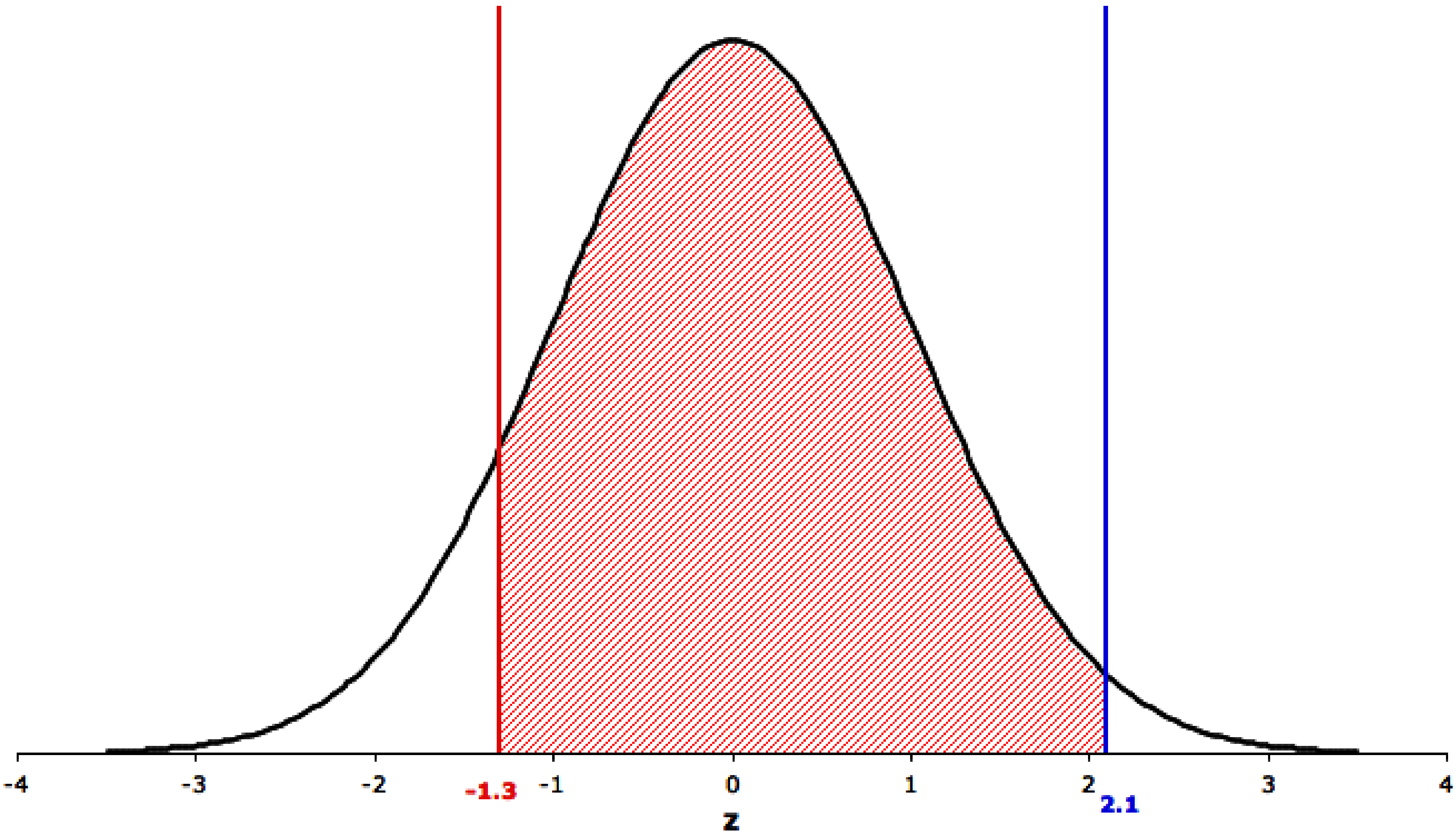
$$P(Z < 2.10) = .9821$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P(-1.30 < Z < 2.10) &= P(Z < 2.10) - P(Z < -1.30) \\ &= .9821 - .0968 = .8853 \end{aligned}$$

Πίνακας 3...

$$P(-1.30 < Z < 2.10) = .8853$$



Πίνακας 3…

Σημειώστε ότι η μεγαλύτερη τιμή του z στον πίνακα είναι 3.09, και ότι P(Z < 3.09) = .9990. Αυτό σημαίνει ότι

$$P(Z > 3.09) = 1 - .9990 = .0010$$

Ωστόσο, επειδή ο πίνακας δεν περιέχει τιμές πέρα από το 3.09, προσεγγίζουμε οποιαδήποτε περιοχή πέρα από το 3.10 ως 0. Άρα,

$$P(Z > 3.10) = P(Z < -3.10) \approx 0$$

Πίνακας 3…

Θυμηθείτε ότι τους Πίνακες 1 και 2 μπορούσαμε να τους χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την πιθανότητα η X να *ισούται* με κάποια τιμή x, αλλά τώρα δεν θα κάνουμε το ίδιο με τον πίνακα της κανονικής κατανομής.

Θυμηθείτε ότι η κανονική τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής και ότι η πιθανότητα μια συνεχής τυχαία μεταβλητή να ισούται με οποιαδήποτε μεμονωμένη τιμή είναι 0.

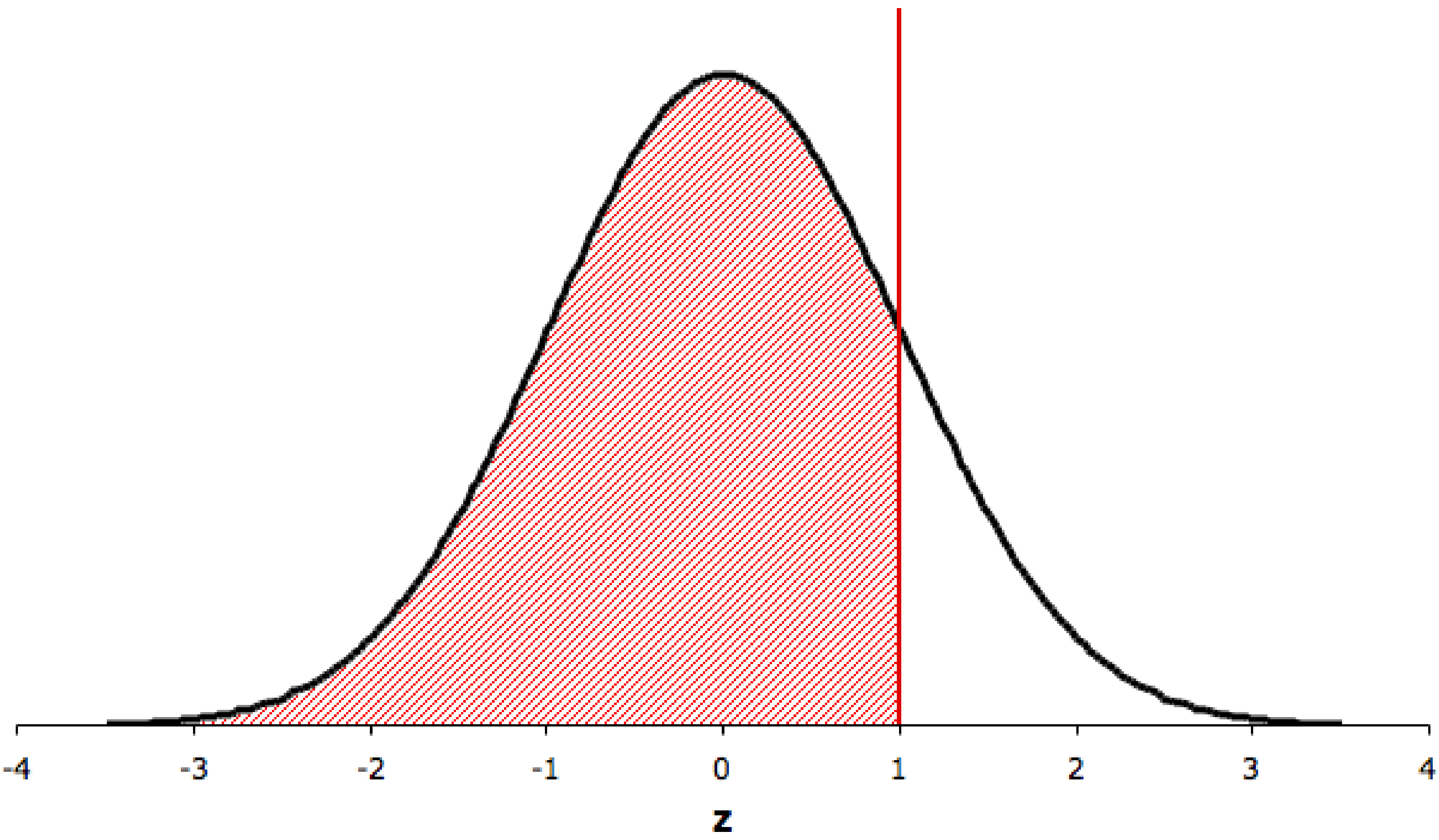
Παράδειγμα 8.2…

Τελικά, επιστρέφοντας στο Παράδειγμα 8.2, η πιθανότητα που αναζητάμε είναι

$$P(X < 1{,}100) = P(\ Z < 1.00) = .8413$$

Παράδειγμα 8.2…

$P(X < 1{,}100) = P(\ Z < 1.00) = .8413$



ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Μέτρηση Κινδύνου

Έχουμε δει οικονομικές εφαρμογές μελετώντας τη μείωση της διακύμανσης της απόδοσης μιας επένδυσης. Δεν έχουμε όμως εξηγήσει γιατί ο κίνδυνος μετριέται μέσω της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης, το οποίο γίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.3

Θεωρήστε μια επένδυση της οποίας οι αποδόσεις έχουν κανονική κατανομή με μέσο 10% και τυπική απόκλιση 5%.

a. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να χάσουμε χρήματα.

b. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να χάσουμε χρήματα, όταν η τυπική απόκλιση είναι ίση με 10%.

Παράδειγμα 8.3

a Από την επένδυση χάνουμε χρήματα όταν η απόδοση είναι αρνητική. Επομένως ζητάμε την

$$P(X < 0)$$

Το πρώτο βήμα είναι να τυποποιήσουμε και την X και την τιμή 0 στην έκφραση της πιθανότητας.

$$P(X < 0) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{0 - 10}{5}\right) = P(Z < -2.00)$$

Παράδειγμα 8.3

Από τον Πίνακα 3 βρίσκουμε

$$P(Z < -2.00) = .0228$$

Συνεπώς η πιθανότητα ζημίας είναι .0228

Παράδειγμα 8.3

b. Εάν αυξήσουμε την τυπική απόκλιση στο 10% η πιθανότητα να υποστούμε ζημία γίνεται

$$P(X < 0) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0-10}{10}\right)$$

$$= P(Z < -1.00)$$

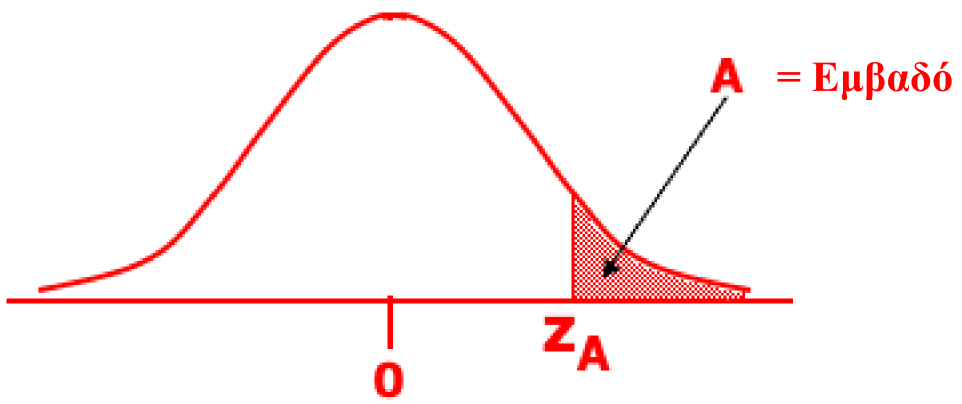
$$= .1587$$

Υπολογισμός Τιμών της Z…

Συχνά θέλουμε να υπολογίσουμε κάποια τιμή της Z για μια δεδομένη πιθανότητα, δηλ. έχοντας δεδομένη μια περιοχή εμβαδού (A) κάτω από την καμπύλη, ποια είναι η τιμή της z (z_A) στον οριζόντιο άξονα που δίνει το αντίστοιχο εμβαδό;

Αυτό σημαίνει ότι:

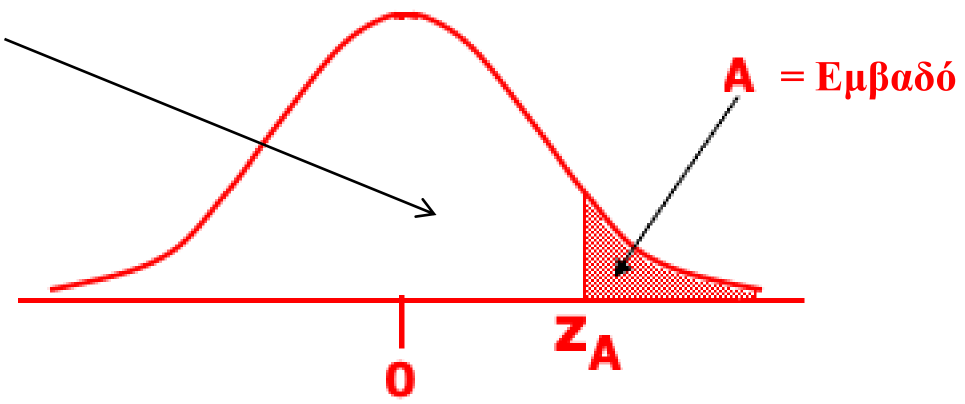
$$\mathbf{P(Z > z_A) = A}$$



Υπολογισμός Τιμών της Z…

Ποια τιμή της z αντιστοιχεί σε εμβαδό 2.5% κάτω από την καμπύλη; Δηλαδή ποια είναι η τιμή $z_{.025}$;

$(1 – A) = (1–.025) = .9750$



Εάν κάνετε “αντίστροφη αναζήτηση” στον Πίνακα 3 για το .9750, θα βρείτε την αντίστοιχη τιμή $z_A = 1.96$

Αφού $P(z > 1.96) = .025$, λέμε ότι: $\mathbf{z_{.025} = 1.96}$

Κατανομή Student *t* …

Εδώ το γράμμα ***t*** χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει μια τυχαία μεταβλητή. Η συνάρτηση πυκνότητας για την κατανομή Student ***t*** είναι …

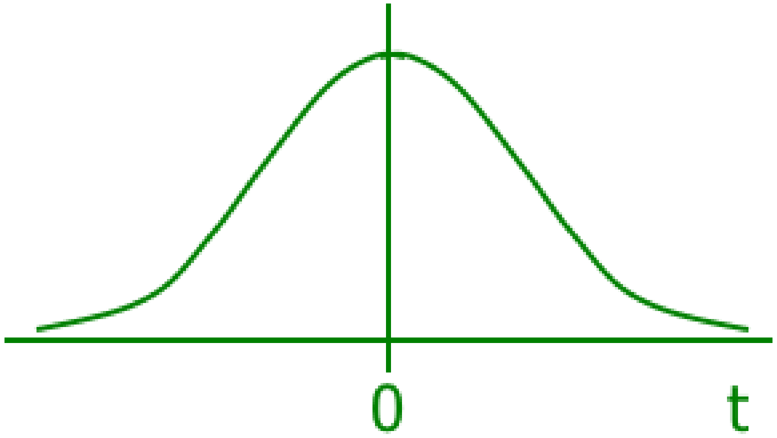
$$f(t) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\nu/2)}\left[1+\frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

ν (νι) είναι ***οι βαθμοί ελευθερίας***, και

Γ (συνάρτηση Γάμμα) είναι Γ(k)=(k-1)(k-2)…(2)(1)

Κατανομή Student ***t*** …

Όπως και η τυποποιημένη κανονική κατανομή, η κατανομή Student ***t*** έχει σχήμα "λόφου" και είναι συμμετρική ως προς το 0 (μέσος):



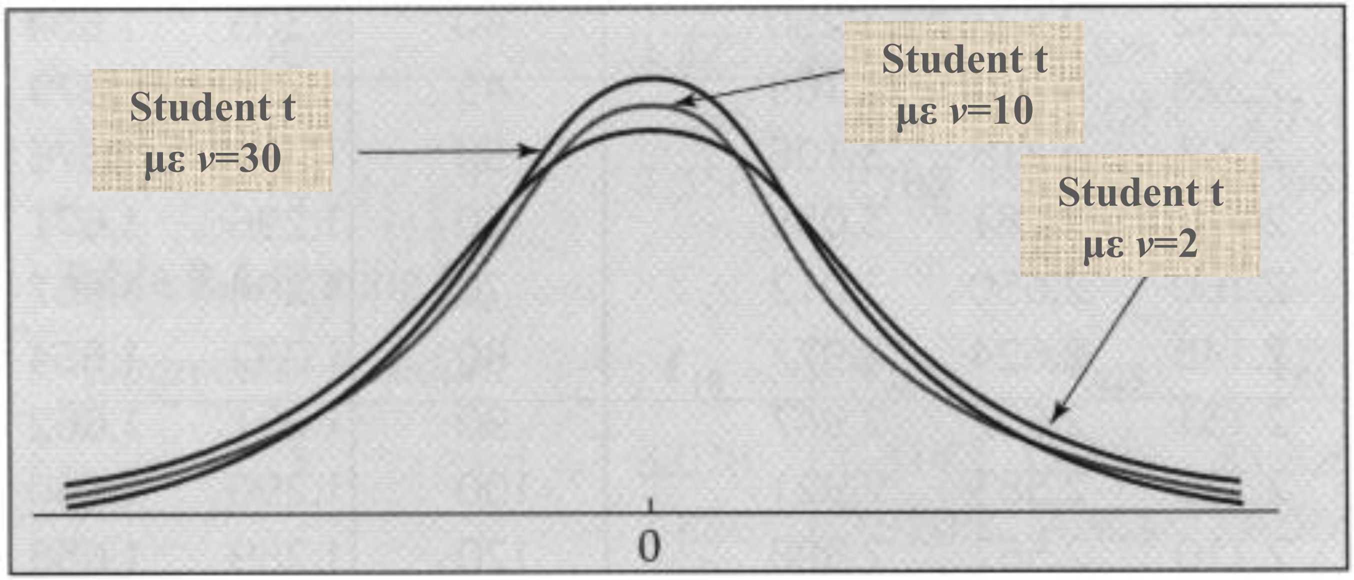
Ο μέσος και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής Student t είναι $E(t) = 0$

και

$$V(t) = \frac{\nu}{\nu - 2} \qquad \text{για } \nu > 2.$$

Κατανομή Student ***t*** …

Όπως το μ και το σ καθορίζουν την κανονική κατανομή, εδώ το ν, οι βαθμοί ελευθερίας, καθορίζουν την κατανομή Student ***t*** :



Όσο οι βαθμοί ελευθερίας αυξάνονται, η κατανομή ***t*** προσεγγίζει την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

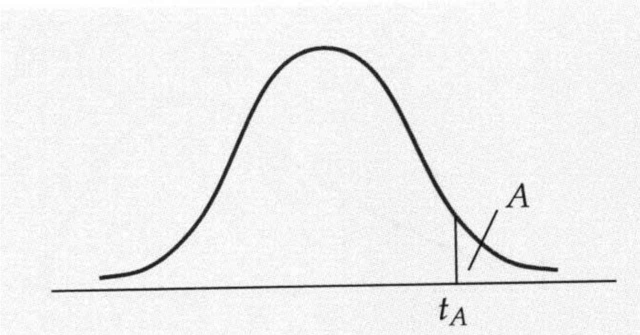
Υπολογισμός τιμών της Student *t* …

Η κατανομή student ***t*** χρησιμοποιείται ευρέως στην επαγωγική στατιστική. Ο πίνακας 4 στο Παράρτημα Β δίνει τιμές της $t_{A,\nu}$

Δηλαδή, τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής Student ***t*** με $\boldsymbol{\nu}$ βαθμούς ελευθερίας έτσι ώστε:

$$P(t > t_{A,\nu}) = A$$

Οι τιμές του A είναι προκαθορισμένες “κρίσιμες” τιμές, τυπικά κινούνται σε 10%, 5%, 2.5%, 1% και 1/2% .



Χρήση του πίνακα *t* (Πίνακας 4) για τιμές ...

Για παράδειγμα, εάν θέλουμε την τιμή της *t* με 10 βαθμούς ελευθερίας έτσι ώστε το εμβαδό κάτω από την καμπύλη *t* να είναι .05:

Εμβαδό κάτω από την καμπύλη για την τιμή (t_A) : ΣΤΗΛΗ

$t_{.05,10}$

$t_{.05,10}=1.812$

Βαθμοί ελευθερίας: ΓΡΑΜΜΗ →

DEGREES OF FREEDOM	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106